Mediciones indirectas

Propagación de incertidumbres

Hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados; para determinar la velocidad de un vehículo se miden independientemente distancias e intervalos de tiempo. La pregunta que queremos responder aquí es cómo las incertidumbres en las magnitudes que se miden directamente se propagarán para contribuir a la incertidumbre de la magnitud derivada que se calcula usando una expresión.

Propagación de errores en sumas y diferencias

Datos iniciales: $x \pm \Delta x$ $\quad y \pm \Delta y$

Sea su suma $q = x + y$ y su diferencia $q = x - y$

¿Cuál es la incertidumbre, Δq?

	Suma	Diferencia
Valor máximo de q	$q_{max} = x + \Delta x + y + \Delta y = x + y + (\Delta x + \Delta y)$	$q_{max} = x + \Delta x - (y - \Delta y) = x - y + (\Delta x + \Delta y)$
Valor mínimo de q	$q_{min} = x - \Delta x + y - \Delta y = x + y - (\Delta x + \Delta y)$	$q_{min} = x - \Delta x - (y + \Delta y) = x - y - (\Delta x + \Delta y)$

El error absoluto de la suma y de la diferencia de dos o más magnitudes es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes:

$$\boxed{q = x \pm y \quad \Rightarrow \quad \Delta \approx \Delta x + \Delta y}$$

Ejemplo:

En un experimento se introducen dos líquidos en un matraz y se quiere hallar la masa total del líquido.
Se conocen:

M_1 = Masa del matraz 1 + contenido = 540 ± 10 g

m_1 = Masa del matraz 1 = 72 ± 1 g

M_2 = Masa del matraz 2 + contenido = 940 ± 20 g

M_2 = Masa del matraz 2 = 97 ± 1 g

La masa de líquido será:

$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$

Su error:

$\Delta M = \Delta M + \Delta m + \Delta M + \Delta m = 32g$

El resultado se expresará:

M = 1310 ± 32 g

Propagación de errores en productos

Datos iniciales: $x \pm \Delta x = x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x|}\right)$ $\quad y \pm \Delta y = y\left(1 \pm \frac{\Delta y}{|y|}\right)$

Sea su producto $q = x\,y$

¿Cuál es la incertidumbre, Δq?

	Producto
Valor máximo de q	$q_{\max} = x\left(1+\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)y\left(1+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right) \cong xy\left(1+\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right)$
Valor mínimo de q	$q_{\min} = x\left(1-\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)y\left(1-\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right) \cong xy\left(1-\left[\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right]\right)$

El error relativo del producto es igual a la suma de los errores relativos:

$$\boxed{q = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{|q|} \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}}$$

Propagación de errores en cocientes

Datos iniciales: $x \pm \Delta x = x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x|}\right)$ $\quad y \pm \Delta y = y\left(1 \pm \frac{\Delta y}{|y|}\right)$

Sea su producto $\boldsymbol{q = x / y}$

¿Cuál es la incertidumbre, Δq?

	Cociente
Valor máximo de q	$q_{\max} = \frac{x\left(1+\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)}{y\left(1-\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right)} \cong \frac{x}{y}\left(1+\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)\left(1+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right) \cong \frac{x}{y}\left(1+\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right)$
Valor mínimo de q	$q_{\min} = \frac{x\left(1-\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)}{y\left(1+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right)} \cong \frac{x}{y}\left(1-\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}\right)\left(1-\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right) \cong \frac{x}{y}\left(1-\left(\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}\right)\right)$

El error relativo del cociente es la suma de los errores relativos:

$$\boxed{q = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{|q|} \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}}$$

Ejemplo:

Para medir la altura de un árbol, L, se mide la longitud de su sombra, L_1, la altura de un objeto de referencia, L_2, y la longitud de su sombra, L_3. Por semejanza:

$$L = L_1 \frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan:

L_1 = 200 ± 2 cm, L_2 = 100.0 ± 0.4 cm, L_3 = 10.3 ± 0.2 cm

Por tanto

$$L = 200\ \frac{100}{10} = 2000\ cm$$

Su error será

$$\frac{\Delta L}{|L|} \approx \frac{\Delta L_1}{|L_1|} + \frac{\Delta L_2}{|L_2|} + \frac{\Delta L_3}{|L_3|} = \frac{2}{200} + \frac{0.4}{100} + \frac{0.2}{10.3} =$$

$$= (1 + 0.4 + 2)\% = 3.4\% \quad \rightarrow \Delta L = \frac{3.4}{100}\ 2000 = 68$$

***L* = 2000 ± 70 cm**

Error del producto por una constante

Datos iniciales: $x \pm \Delta x$

Sea $q = A.x$

¿Cuál es la incertidumbre, Δq?

Aplicando la regla del producto: $\frac{\Delta q}{|q|} \approx \frac{\Delta A}{|A|} + \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|}$

$$\Delta A = 0 \qquad \Rightarrow \quad \Delta q = |A| \Delta x$$

El error absoluto del producto de una constante por una magnitud es igual al producto de la constante por error absoluto de la magnitud

$$\boxed{\Delta q = |A| \Delta x}$$

Error de una potencia

Datos iniciales: $x \pm \Delta x$ Sea $q = x^n = x.x.\ldots.x$

¿Cuál es la incertidumbre, Δq?

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{\Delta q}{|q|} \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta x}{|x|} + \cdots + \frac{\Delta x}{|x|} = |n| \frac{\Delta x}{|x|}$$

El error relativo de una potencia es el producto de la potencia por el error relativo de la magnitud:

$$\boxed{\frac{\Delta q}{|q|} = |n| \frac{\Delta x}{|x|}}$$